Plusieurs variables aléatoires

Table des matières

1. Divers

1.1. Indépendance

1. Question de cours :
   a. si X et Y indépendantes, montrer que $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.
   b. si X et Y dépendantes, donner des contrexemples où l'égalité n'est pas vérifiée. Peut-on trouver des contrexemples où l'égalité est vérifiée quand même ?

2. Loi de $X+Y$

1. **Somme de deux variables**
   a. Quel est l'autre nom de la loi $\mathcal{B}\left(m=1;p=\frac{1}{2}\right)$?
   b. On donne X,Y,Z des variables aléatoires indépendantes avec :

$$\begin{aligned} X &\sim \mathcal{U}(2) \\ Y &\sim \mathcal{U}(m) \\ Z &\sim \mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right) \quad \text{où } n\in\mathbb{N}^* \\ T &= a\,X+b \quad \text{où } a,b\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

      i. Donner la loi de $X+Y$. Calculer $\mathbb{E}(X+Y)$ de deux manières (avec $\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$ puis avec $\mathbb{E}(Z)=\sum z_i\cdot p(z_i)$

ii. Peut-on trouver n, a, b tels que $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(T)\\ \text{et}\\ V(Z)=V(T)\end{array}\right.$? (réponse $\left\{\begin{array}{l}n\in\mathbb{N}\\ a=\sqrt{n}\text{ ou }-\sqrt{n}\\ b=a^2-2a\end{array}\right.$.)

2. X suit la loi $\mathcal{B}(2n,p)$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $p<]0;1[$. On demande l'espérance de $Y=\left\lfloor\dfrac{X}{2}\right\rfloor$.

Réponse :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{u=0}^{2n} u\cdot p(Y=u)\\
&= \sum_{u=0}^{n} u\cdot p(X=2u \text{ ou } X=2u+1)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{u=0}^{n}(2u)\cdot p(X=2u)+\frac{1}{2}\sum_{u=0}^{n-1}(2u+1)\cdot p(X=2u+1)-\frac{1}{2}\sum_{u=0}^{n-1}p(X=2u+1)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}(X)-\frac{1}{2}\underbrace{p(X\text{ impair})}_{1/2}\\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X)-\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

3. COVARIANCE

3.1. Résultats de base

- On définit $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\,E(Y)$, généralisation de $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$.
- On montre facilement que $\mathrm{Cov}(X,Y)=E((X-\mu)(Y-\mu'))$ où l'on note $\left\{\begin{array}{l}\mu=E(X)\\ \mu'=E(Y),\end{array}\right.$ généralisation de $V(X)=E((X-\mu)^2)$.
- $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, alors } \mathrm{Cov}(X,Y)=0}$

  Preuve : $E(XY)=\sum_{i,j}x_iy_j\,p(X=x_i\cap Y=y_j)=\sum_{i,j}x_iy_j\,p(X=x_i)\times p(Y=y_j)=\sum_i x_i\,p(X=x_i)\times\sum_j y_j\,p(Y=y_j)=E(X)\,E(Y)$.
- $\boxed{\text{Si } \mathrm{Cov}(X,Y)\text{, cela n'implique pas que } X,Y \text{ indépendantes}}$

  Contre exemple : Soit Z de loi $p(Z=1)=p(Z=-1)=\dfrac{1}{2}$, et soit X quelconque indépendante de Z. Alors $\mathrm{Cov}(X,ZX)=0$.

  Preuve : pour toute variable Y, $\mathrm{Cov}(ZY)=\dfrac{1}{2}E_{Z=+1}(ZY)+\dfrac{1}{2}E_{Z=-1}(ZY)=0$ donc dans notre cas ici, $E(ZX^2)=E(ZX)=0$ donc $\mathrm{Cov}(ZX,X)=0$.
- Bilinéarité : $\mathrm{Cov}(a+X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- Visualisation grosso modo : si X et Y sont « en même temps » au-dessus de leur espérance, alors $\mathrm{Cov}(X,Y)>0$.

3.2. Exercices

1. X,Y de Bernoulli vérifient $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. Montrer que X,Y indépendantes.
   Réponse : Si $X\sim B(p)$ et $Y\sim B(p')$ alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ implique $E(XY)=p\,p'$ donc $p(X=1\cap Y=1)=p(X=1)\times p(Y=1)$, et on recommence en utilisant le fait que $\mathrm{Cov}(1-X,Y)=\mathrm{Cov}(X,1-Y)=\mathrm{cov}(1-X,1-Y)=0$.
2. (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles. Montrer que :

$$|\mathrm{cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{V(X)\,V(Y)}.$$

Réponse : On écrit que $V(X+\lambda Y)\geqslant 0$ pour toute valeur de $\lambda\in\mathbb{R}$, et c'est un exercice de second degré. En fait, c'est une variante de $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\times\|y\|$.

4. Plusieurs lois géométriques

Si $X\sim\mathcal{G}(p)$ alors $\Omega(X)=\{1;2;3;\ldots\}$ et pour tout $k\geqslant 1$: $p(X=k)=q^{k-1}p$.

4.1. Deux lois géométriques

X,Y indépendantes suivent $\mathcal{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$; on pose $q=1-p$.

$\boxed{\text{Loi de } (U,V) \text{ avec } U=\min(X,Y) \text{ et } V=\max(X,Y)}$

- Soient $1\leqslant k<\ell$, alors :

$$\begin{aligned} p((U,V)=(k,\ell)) &= p(X=\ell)\times p(Y=k)+p(X=k)\times p(Y=\ell)\\ &= 2p^2q^{k+\ell-2}. \end{aligned}$$

- Si $k=\ell$, alors $p((U,V)=(\ell,\ell))=p^2q^{2\ell-2}$.
- Si $k>\ell$, alors $p((U,V)=(k,\ell))=0$.

Vérification : On fait la double somme, ou trouve 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell\geqslant 1}\left(p^2q^{2\ell-2}+\sum_{k=1}^{\ell-1}2p^2q^{k+\ell-2}\right) &= \sum_{\ell\geqslant 0}\left(p^2q^{2\ell}+\sum_{k=0}^{\ell-1}2p^2q^{k+\ell}\right)\\ &= \sum_{\ell\geqslant 0}\left(p^2q^{2\ell}+2p^2q^{\ell}\frac{1-q^{\ell}}{1-q}\right)\\ &= \sum_{\ell\geqslant 0}(p^2q^{2\ell}+2p\,q^{\ell}(1-q^{\ell}))\\ &= \sum_{\ell\geqslant 0}(p^2q^{2\ell}+2p\,q^{\ell}-2p\,q^{2\ell})\\ &= \frac{p}{1+q}+2-\frac{2}{1+q}.\\ &= 1. \end{aligned}$$

En fait la vérification peut se faire directement par un principe de double somme, cliquer sur le point : •.

$\boxed{\text{Lois de } U \text{ et de } V}$

$p(U=k)=p(X=Y=k)+p(X=k)\times p(Y>k)+p(Y=k)\times p(X>k)$, on trouve donc :

$$\begin{aligned} p(U=k) &= p^2q^{2k-2}+2\,p^2q^{k-1}(q^k+q^{k+1}+\ldots)\\ &= p^2q^{2k-2}+2p\,q^{2k-1}\\ &= p\,q^{2k-2}(p+2q)\\ &= p\,q^{2k-2}(1+q) \end{aligned}$$

de même : $p(V=k)=p(X=Y=k)+p(X=k)\times p(Y<k)+p(Y=k)\times p(X<k)$ donc :

$$\begin{aligned} p(V=k) &= p^2q^{2k-2}+2\,p^2q^{k-1}(1+q+q^2+\cdots+q^{k-2})\\ &= p^2q^{2k-2}+2p\,q^{k-1}(1-q^{k-1})\\ &= p\,q^{k-1}(p\,q^{k-1}+2(1-q^{k-1}))\\ &= p\,q^{k-1}(2-q^{k-1}-q^k). \end{aligned}$$

Autre méthode : $p(U=k)=\sum_{\ell\geqslant k}p((U,V)=(k,\ell))$.

Remarque 1. On ne peut pas espérer vérifier nos résultats en calculant d'un côté $p((U,V)=(k,\ell))$ et de l'autre $p(U=k)\times p(V=\ell)$, car U et V ne sont pas du tout indépendants.

$\boxed{\text{Loi de } W = |X - Y|}$

- si $k > 0$, $p(W = k) = 2p^2 q^{k-1}(1 + q^2 + q^4 + \cdots) = \dfrac{2p\, q^{k-1}}{1+q}$;
- pour $k = 0$ on a $p(W = 0) = p^2(1 + q^2 + q^4 + \cdots) = \dfrac{p}{1+q}$.

$\boxed{\text{Loi de } Z = X + Y}$

$Z(\Omega) = \{2; 3; ...\}$ et l'on a simplement :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{j=1}^{k-1} p(X=j) \times p(Y=k-j) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (p\, q^{j-1}) \times (p\, q^{k-j-1}) \\ &= p^2\, q^{k-2}(k-1) \end{aligned}$$

4.2. n lois géométriques

$X_1, X_2, ..., X_n$ mutuellement indépendantes suivent $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$; on pose $q = 1 - p$.

$\boxed{\text{Loi de } Z_n = X_1 + \cdots + X_n}$

On a $Z_n(\Omega) = \{n, n+1, ...\}$ puis $p(Z_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$. Cela se démontre simplement par récurrence sur n.

$\boxed{\text{Loi de } U = \mathrm{Min}(X_1, ..., X_n) \text{ et de } V = \mathrm{Max}(X_1, ..., X_n)}$

On a :

$$\begin{aligned} p(U=k) &= p(X_1, ..., X_n \geqslant k) - p(X_1, ..., X_n > k) \\ &= (p(q^{k-1} + q^k + \cdots))^n - (p(q^k + q^{k+1} + \cdots))^n \\ &= q^{kn-n} - q^{kn} \\ &= q^{(k-1)n}(1 - q^n), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} p(V=k) &= p(X_1, ..., X_n \leqslant k) - p(X_1, ..., X_n < k) \\ & (p(1 + q + \cdots + q^{k-1}))^n - (p(1 + q + \cdots + q^{k-2}))^n \\ & q^{k-1}(1-q)(2 - q^k - q^{k-1}). \end{aligned}$$

5. Plusieurs lois de Poisson

Note 2. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\Omega(X) = \{0; 1; 2; 3; ...\}$ et pour tout $k \geqslant 0$: $p(X = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^k}{k!}$.

5.1. Deux lois de Poisson

X, Y indépendantes suivent $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $l > 0$.

$\boxed{\text{Loi de } (U, V) \text{ avec } U = \min(X, Y) \text{ et } V = \max(X, Y)}$

- Soient $0 \leqslant k < \ell$, alors :

$$\begin{aligned} p((U,V) = (k,\ell)) &= p(X=\ell) \times p(Y=k) + p(X=k) \times p(Y=\ell) \\ &= 2\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^k}{k!} \times \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^\ell}{\ell!} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \binom{k+\ell}{k}. \end{aligned}$$

- Si $k=\ell$, alors $p((U,V)=(\ell,\ell))=\mathrm{e}^{-2\lambda}\frac{\lambda^{2\ell}}{(2\ell)!}\binom{2\ell}{k}$.
- Si $k>\ell$, alors $p((U,V)=(k,\ell))=0$.

Vérification : pour la double somme, aucun besoin de calculer explicitement car :

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ell\geqslant 0} p((U,V)=(k,\ell)) &= \sum_{k<\ell}(p(X=\ell)\times p(Y=k)+p(X=k)\times p(Y=\ell))+\sum_k (p(X=k))^2\\ &= \sum_{k\neq\ell}(p(X=\ell)\times p(Y=k))+\sum_k(p(X=k))^2\\ &= \sum_{k,\ell}(p(X=\ell)\times p(Y=k))\\ &= \sum_\ell p(X=\ell)\sum_k p(Y=k)\\ &= 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Lois de } U \text{ et de } V}$

Pas facile à simplifier, on trouve $p(U=k)=\frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^k}{k!}\left(\frac{\lambda^k}{k!}+2\sum_{i>k}\frac{\lambda^i}{i!}\right)$.
Et $p(U=k)=\frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^k}{k!}\left(\frac{\lambda^k}{k!}+2\sum_{i<k}\frac{\lambda^i}{i!}\right)$.

$\boxed{\text{Loi de } Z=X+Y}$

On a

$$\begin{aligned}p(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} p(X=j)\,p(Y=k-j)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k-j}}{k-j!}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}(2\lambda)^k}{k!},\end{aligned}$$

donc $X+Y$ suit tout simplement la loi $\mathcal{P}(2\lambda)$.

$\boxed{\text{Loi de } Z'=X'+Y'}$

On prend cette fois-ci des paramètres différents, $X'\sim\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y'\sim\mathcal{P}(\mu)$, on montre sans peine que Z' suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

5.2. n lois de Poisson

$\boxed{\text{Loi de } Z_n=X_1+\cdots+X_n}$

Par une récurrence assez simple, on montre que Z_n suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

5.3. Combinaisons particulières

1. On pose pour $k\in\mathbb{N}$: $p(X=k)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(a+b\,k)$.
   a. Trouver une relation entre a et b pour que X soit bien une variable aléatoire.
   b. Calculer $E(X)$.
   c. Calculer $V(X)$.

   Réponses :

   a. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} p(X=k) &= a\sum_{k\geqslant 0}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}+\lambda\,b\sum_{k\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= a+\lambda b,\end{aligned}$$

d'où $\boxed{a+\lambda b=1}$.

b. On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= a\sum_{k\geqslant 0} k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \lambda b \sum_{k\geqslant 1} k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= a\lambda + \lambda b \sum_{k\geqslant 1}(k-1+1)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= a\lambda + \lambda b(\lambda+1), \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{E(X)=\lambda(b+1)}.$$

c. On calcule $E(X)^2$:

$$E(X)^2 = \lambda^2(b+1)^2.$$

On calcule $E(X^2)$, pour cela on pose $Y, Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et l'on écrit :

$$p(X=k) = a\,p(Y=k) + b\,\lambda\,p(Z+1=k),$$

et l'on sait que $E(Y^2)=E(Z^2)=V(Y)+E^2(Y)=\lambda+\lambda^2$ donc :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= a\,E(Y^2) + b\,\lambda\,E((Z+1)^2) \\ &= a\,E(Y^2) + b\,\lambda\,(E(Z^2)+2E(Z)+1) \\ &= (a+b\,\lambda)(\lambda+\lambda^2) + 2b\lambda\lambda + b\lambda \\ &= \lambda+\lambda^2+2b\lambda\lambda+b\lambda \\ &= \lambda(1+b)+\lambda^2(1+2b). \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{V(X)=\lambda+\lambda b-(\lambda b)^2}.$$

6. MÉLANGE DE LOIS

6.1. Une binomiale et une Poisson

1. $N\sim\mathcal{P}(\lambda)$ et $\left\{\begin{array}{l} Y\sim\mathcal{B}(N,p) \\ Z\sim\mathcal{B}(N,q)\end{array}\right.$ avec $p+q=1$.

Montrer que $\left\{\begin{array}{l} Y\sim\mathcal{P}(\lambda p) \\ Z\sim\mathcal{P}(\lambda q)\end{array}\right.$ et que Y et Z sont indépendantes.

Présentation plus concrète :

$N\sim\mathcal{P}(\lambda)$ est le nombre de candidats à un examen, sachant que la probabilité pour un candidat d'être reçu est p et que les résultats des candidats sont mutuellement indépendants. Donner la loi de Y, le nombre de candidats reçus, et Z le nombre de candidats recalés, et déterminer si Y et Z sont indépendantes ou pas.

On trouve :

$$\begin{aligned} p(Y=k) &= \sum_{n\geqslant k} p(N=n)\times p_{N=n}(Y=k) \\ &= \sum_{n\geqslant k}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\ &= p^k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\times\underbrace{\sum_{n\geqslant k}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}q^{n-k}}_{=\mathrm{e}^{\lambda q}} \\ &= (p\lambda)^k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}}{k!}, \end{aligned}$$

donc $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$. Par analogie, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda q)$.

Ensuite :

$$\begin{aligned} p(Y=k \cap Z=\ell) &= p(N=k+\ell) \times p_{N=k+\ell}(Y=k \cap Z=\ell) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \times p^k q^\ell \binom{k+\ell}{k} \\ &= p(Y=k) \times p(Z=\ell), \end{aligned}$$

donc, contrairement au bon sens qui se laisserait abuser par la relation $Y+Z=N$ qui semble les voir dépendantes, en fait Y et Z sont indépendantes

6.2. Deux uniformes

1. N uniforme dans $\{1, \dots, n\}$ et B uniforme dans $\{1, \dots, N\}$, loi et espérance de B ?

   Réponse : on trouve $B(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et $p(B=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right)$, on vérifie, en écrivant en colonnes, que $\sum_{k=1}^n p(B=k) = 1$.

   $E(B) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E_{N=k}(B) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) = \frac{n}{4} + \frac{3}{4}$.

   Logiquement, $E(B)$ est plus petit que $E(N)$.

2. X et Y indépendantes et uniformes dans $\{1, \dots, n\}$, calculer $p(X=Y)$.

   Réponse : $p(X=Y) = \sum_{k=1}^n p(X=k) \times p(Y=k) = \frac{1}{n}$.

6.3. Une binomiale et une uniforme

1. N uniforme dans $\{1, \dots, n\}$ et $X \sim \mathcal{B}(N, p)$, loi et espérance de X ?

   Réponse : $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et :

$$\begin{aligned} p(X=k) &= \sum_{i=k}^{n} p(N=i) \times p_{N=i}(X=k) \\ &= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} \times \binom{i}{k} p^k q^{i-k} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{k!} \times p^k \times \left(1 + q\binom{k+1}{k} + q^2\binom{k+2}{k} + \dots + q^{n-k}\binom{n}{k}\right), \end{aligned}$$

difficile à simplifier. Par contre l'espérance se simplifie facilement :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{n} p(N=i) \times E_{N=i}(X) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} \times i\,p \\ &= \frac{p(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

L'espérance est logiquement plus faible que celle de $\mathcal{B}(n, p)$.

6.4. Deux binomiales

1. X et Y indépendantes suivent $\mathcal{B}(n, p)$, calculer $p(X=Y)$

   Réponse : utilise $\sum \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (voir fichier dénombrement). $p(X=Y) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.