Variables aléatoires discrètes

Table des matières

1. théorie . . . 1
1.1. Moment d'ordre n . . . 1
2. Lois discrètes usuelles . . . 1
2.1. Loi binomiale . . . 2
2.2. Loi de Poisson . . . 2
3. Exercices divers . . . 2
3.1. La n-ième occurrence (loi de Pascal, ou binomiale négative) . . . 3
3.1.1. La n-ième occurrence . . . 3
3.2. Divers . . . 3
3.3. Pile et face . . . 3
3.3.1. le nombre impair . . . 3
3.3.2. de plus en plus de tirages . . . 4
3.4. Tirer une boule déjà tirée . . . 4
3.5. Max des boules tirées . . . 5
3.6. Nombre d'urnes vides (ou nombre d'urnes pleines) . . . 5
3.6.1. r boules dans n urnes . . . 5
3.6.2. L'ascenseur . . . 6
3.6.3. Urnes de plus en plus grandes . . . 6
3.7. Nombre de numéros distincts . . . 6
4. Tribus . . . 6
5. Utilisation de Markov & Tchebychev-BienAymé . . . 7

1. théorie

1.1. Moment d'ordre n

On pose $m_n = \sum_{k \geqslant 0} k^n p_k = E(X^n)$.

Le moment centré d'ordre 2 est la variance car :

$$\begin{aligned} E((X-\mu)^2) &= \sum (k-\mu)^2 p_k \\ &= \sum k^2\, p_k - 2\mu \sum k\, p_k + \mu^2 \sum p_k \\ &= E(X^2) - \underbrace{2\mu E(X)}_{-2\mu^2} + \mu^2 \\ &= E(X^2) - E^2(X). \end{aligned}$$

1.2. Fonctions génératrices

Pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $\Omega \in \mathbb{N}$), on pose :

$$g_X(z) = \sum_{k \geqslant 0} p(X=k)\, z^k = E(z^X).$$

Si l'on évalue en 0 et en 1, on a toujours :

- $g_X(0)$ a priori non définie, mais on peut convenir que $g_X(0) = p(X=0)$.

- De même, $\frac{1}{n!}\, g_X^{(k)}(0) = p(X = k)$.
- $g_X(1) = \sum_{k \geqslant 0} p(X = k) = 1$.

On a aussi facilement :

- $g_X'(1) = E(X)$;
- $g_X''(1) = E(X - X^2)$;
- $g_X^{(n)}(1) = E(X(X-1)...(X-n))$.

Par produit de Cauchy de deux séries, on a, lorsque X et Y sont indépendantes :

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s) \times g_Y(s).$$

1.2.1. Les dés truqués

On tire deux dés truqués X et Y (p_1, ..., p_6 pour le premier et q_1, ..., q_6 pour le second). On se demande si la loi de $X + Y$ peut être uniforme. Montrer que c'est impossible en utilisant les fonctions génératrices.

Réponse : $g_X(z) = p_1\, z + \cdots + p_6\, z^6$ et $g_Y(z) = q_1\, z + \cdots + q_6\, z^6$ donc :

$$g_X \cdot g_Y(z) = z^2\,(p_1 + \cdots + p_6\, z^5)(q_1 + \cdots + q_6\, z^5),$$

or la fonction génératrice d'une loi uniforme sur $[|2;12|]$ est $g_U(z) = \frac{1}{11}\, z^2 (1 + z + \cdots + z^{10})$ (car les probabilités d'avoir $2, 3, \ldots, 12$ sont toutes égales à $\frac{1}{11}$).

On aurait donc $p_6\, q_6 = \frac{1}{11}$ donc tous deux non nuls donc les deux polynômes de degré 5 ci-dessus admettent au moins une racine réelle chacun.

De même, $p_1\, q_1 = \frac{1}{11}$ donc tous deux non nuls donc ces deux racines réelles sont non nulles.

Or, $1 + z + \cdots + z^{10} = \frac{1 - z^{11}}{1 - z}$ ne s'annulle jamais sur $\mathbb{R}$ donc $g_U(z)$ ne peut s'annuler qu'en 0...

1.2.2. Tirage dans une urne

On tire n fois avec remise une boule dans une urne qui en contient 4 : les quatre boules rapportent respectivement 0,1,1,2 points. Soit S la somme des points obtenus. Par la fonction génératrice, déterminer la loi de S.

Réponse : si X est un seul tirage, alors $g_X(z) = \frac{1}{4}(1 + 2z + z^2)$ donc $g_S(z) = \frac{1}{4^n}(1+z)^{2n}$, fonction de répartition d'une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

1.2.3. n-ième occurence

On tire à pile ou face (p la probabilité d'avoir pile) jusqu'à obtenir m fois « pile » et l'on note T_m le numéro du dernier tirage (qui a donc donné un « pile »).

On rappelle que la loi de T_m est :

$$p(T_m = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m\, (1-p)^{k-m}.$$

Déterminer la fonction $g_{T_m}(z)$ et en déduire $E(T_m)$. On pensera à développer $\frac{1}{(1-t)^m}$.

On pourra utiliser le résultat suivant :

Pour tous entiers n, m on a $\binom{-m}{n} = \binom{n+m-1}{n} \times (-1)^n$.

Pour le résultat intermédiaire on a :

$$\frac{-m(-m-1)...(-m-n+1)}{n!} = (-1)^n \times \frac{m(m+1)...(m+n-1)}{n!}.$$

Ensuite,

$$g_{T_m}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{n-1}{m-1} p^m\, (1-p)^{n-m}\, t^n,$$

que l'on identifie à

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)^m} &= \sum_{n\geqslant 0}\binom{-m}{n}t^n\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m-1}{n}(-t)^n\\ & \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m-1}{m-1}(-t)^n,\end{aligned}$$

d'où $g_{T_m}(z)=\dfrac{(p\,t)^m}{(1-(1-p)t)m}$ d'où $E(T_m)=\dfrac{m}{p}$.

2. Lois discrètes usuelles

2.1. Loi binomiale

On suppose que $X\sim\mathcal{B}(n,p)$.

1. Démontrer $E(X)=n\,p$:
   a. dans le cas $n=2$;
   b. dans le cas général (transformer $k\binom{n}{k}$ en quelque chose de la forme $n\binom{\cdots}{\cdots}$).
2. Calculer $p(X$ pair$)$ et $p(X$ impair$)$.

2.2. Loi de Poisson

On suppose que $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Déterminer $E\left(\dfrac{X}{1+X}\right)$.

   Réponse : $\dfrac{X}{1+X}=1-\dfrac{1}{1+X}$ donc :

$$\begin{aligned}E\left(\frac{X}{1+X}\right) &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda^k}{k!}\times\frac{1}{1+k}\\ &= 1-\frac{1}{\lambda}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\\ &= 1-\frac{1}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})\end{aligned}$$

3. Exercices divers

3.1. La n-ième occurrence (loi de Pascal, ou binomiale négative)

3.1.1. La n-ième occurrence

Soit $x\in]0,1[$.

On tire à pile ou face avec une pièce truquée ($p(\text{pile})=1-x$).
Les tirages sont en nombre illimité et indépendants les uns des autres.
On note T_n le rang du n-ième pile.
Habillage formel de l'exercice :
Les P_n pour $n\in\mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendants et suivent $B(1-x)$.
On pose $T_n=\inf\{k\,/\,S_k=n\}$.

1. On demande la loi et l'espérance de T_n.
2. On demande l'espérance de $(T_n)(1+T_n)$, puis la variance $V(T_n)$.

Réponse

$S_n \sim \mathcal{B}(n, 1-x)$

$T_n(\Omega) = [\![n; +\infty[\![$ et, pour tout $k \geqslant 0$, $p(T_n = n+k) = \underbrace{\binom{k+n-1}{n-1}}_{\text{choix des } n-1 \text{ piles}} \underbrace{(1-x)^n}_{n \text{ piles}} \underbrace{x^k}_{k \text{ faces}}$.

On peut aussi écrire :

$$\boxed{p(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n}}$$

Loi de Pascal

Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k \geqslant 0} (n+k)\binom{n+k-1}{n-1}(1-x)^n x^k \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(1-x)^n \sum_{k \geqslant 0} (n+k)(n+k-1)\ldots(k+2)(k+1)\, x^k \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(1-x)^n \left(\sum_{k \geqslant 0} x^{k+n}\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(1-x)^n \left(\sum_{k \geqslant 0} x^k\right)^{(n)} \quad \text{car les } 1, x, \ldots, x^{n-1} \text{ ont une dérivée } n\text{ième nulle} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(1-x)^n \times \frac{2 \times 3 \times \ldots \times n}{(1-x)^{n+1}} \\
&= \boxed{\frac{n}{1-x}}.
\end{aligned}$$

Si $x \to 0$, alors, à n fixé, $E(T_n) \to n$, logique car si l'on ne tire que des pile, le n-ième pile sera le n-ème tirage. Si $x \to 1$, alors, à n fixé, $E(T_n) \to \infty$, logique car si l'on ne tire quasiment que des face, il faudra attendre longtemps pour le n-ième pile.

Voir aussi dans le paragraphe 1.2 « fonctions génératrices ».

3.2. Divers

1. On choisit $\lambda \in \mathbb{R}$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$p(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

   a. Cela définit-il vraiment une variable aléatoire ? Si oui, pour quelle valeur de λ ?

   b. Dans ce cas, X admet-elle une espérance ? une variance ?

   Réponse :

   - $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$ donc, par télescopage :

$$p(X \leqslant n) = \lambda\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right),$$

     donc X est une variable aléatoire ssi $\boxed{\lambda = 4}$.

   - $\sum n\, p(X = n) = \sum \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ convergente par Riemann. On trouve $\mathbb{E}(X) = 2$ par éléments simples immédiats.

   - Pour la variance, bien sûr, par Riemann, ça diverge.

2. Une cible et n fléchettes qui arrivent sur la cible.

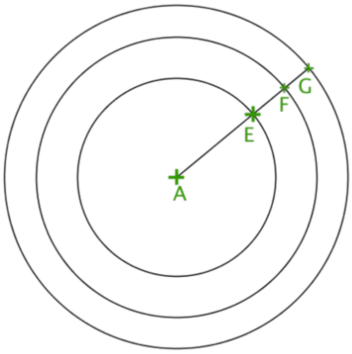

Figure 1. La cible.

a. On suppose $AE = 1$ et on pose $AF = x$ et $AG = y$. Calculer x et y pour que les trois zones (le disque central et chacune des deux bandes) soient de même aire.

b. On suppose que chaque fléchette a la même probabilité de tomber sur chacune des trois zones, et l'on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de zones vides. Donner la loi de X.

Réponse :

- $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$ et on pourrait continuer comme ça.
- $p(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \underbrace{3}_{\text{choix de la zone}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
- pour $p(X = 1)$ ça revient à étudier $A_k =$ « k boules dans C_1 et $n-k$ boules dans C_2 », on remarque que $p(A_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$, et à faire $\binom{3}{1}\sum_{k=1}^{n-1} p(A_k)$. On trouve $p(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.
- On aurait pu voir aussi $p(X = 1) = \underbrace{3}_{\text{choix de la zone vide}} \times$
- par soustraction, $p(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 1)$.

3.3. Pile et face

3.3.1. le nombre impair

On lance $(2n+1)$ pièces de monnaie non truquées, soient A, B le nombre respectif de piles et de faces, et X celui parmi A et B qui est impair. Loi de X, puis $E(X)$.

On peut aussi parler de jetons blancs d'un côté, noirs de l'autre.

Réponse

On a :

$$\begin{aligned} p(X = 2k+1) &= p(A = 2k+1) + p(B = 2k+1) \\ &= \binom{2n+1}{2k+1} \times \frac{1}{2^{2n}} \text{ (lois binomiales)} \end{aligned}$$

(A et B suivent la loi binomiale) mais on ne peut pas appliquer la formule de l'espérance car X ne prend pas toutes les valeurs dans $\{0, \ldots, 2n+1\}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{2n+1}{2k+1} \times \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \text{ (formule du pion)} \\ &= \frac{2n+1}{2^2} \end{aligned}$$

(pour la dernière ligne, voir le fichier `dénombrement`).

3.3.2. de plus en plus de tirages

Première partie : un joueur tire une pièce à pile ou face, s'il obtient pile il s'arrête.

Puis, seconde partie : il tire deux pièces à pile ou face, s'il obtient un pile il s'arrête.

Puis, troisième partie : il tire trois pièces, et ainsi de suite.

On note X le nombre de parties. Loi de X ?

Réponse

Pour $k \geqslant 0$, on a :

$$p(X > k) = \frac{1}{2^0} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \times \ldots \times \frac{1}{2^k}.$$

On vérifie que $p(X > 1) = 1 - p(X = 1) = \frac{1}{2}$ et que $p(X > 0) = \frac{1}{2^0} = 1$.

Donc :

$$E(X) = \sum_{k \geqslant 0} p(X > k) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^{k(k+1)/2}}.$$

3.4. Tirer une boule déjà tirée

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules. On tire une boule avec remise jusqu'au N-ième tirage lors duquel on tombe sur une boule déjà tirée précédemment. Déterminer $N(\Omega)$, $p(N > k)$, puis la loi de N.

Réponse

- $N(\Omega) = \{2, \ldots, n+1\}$ par principe des tiroirs ;
- $p(N > k) =$ probabilité de tirer k boules distinctes $= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{A_n^k}{n^k}$;

  On remarque que cette formule donne $p(N > 1) = 1$ et $p(N > n+1) = 0$, ce qui est cohérent.
- $p(N = k) = p(N > k) - p(N > k-1) = (1-k)\frac{A_n^{k-1}}{n^k}$.

On peut remarquer que $E(N) = \sum_{k \geqslant 1} p(N > k) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{A_n^k}{n^k}$.

3.5. Max des boules tirées

Une urne contient des boules numérotées de 1 à m. On tire n fois avec remise et on note S_n le numéro maximal tiré. Loi et espérance de S_n ?

Réponse

$p(S_n \leqslant i) = \left(\frac{i}{m}\right)^n$ donc $p(S_n = i) = \left(\frac{i}{m}\right)^n - \left(\frac{i-1}{m}\right)^n$ puis :

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \sum_{i=1}^{m} p(S_n \geqslant i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (1 - p(S_n \leqslant i-1)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{i}{N}\right)^n\right) \\ &= m - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{m}\right)^n. \end{aligned}$$

3.6. Nombre d'urnes vides (ou nombre d'urnes pleines)

Les deux exercices « r boules dans n urnes » et « l'ascenseur » sont les mêmes sous des habillages différents.

3.6.1. r boules dans n urnes

n urnes opaques numérotées de 1 à n, on y répartit r boules aléatoirement (la probabilité pour chaque boule d'être mise dans telle ou telle urne est $1/n$).

R_1 le nombre de boules dans la première urne et X le nombre d'urnes vides.

Calculer la loi de R_1, son espérance, et l'espérance de X.

Réponse

- $R_1 \sim \mathcal{B}\left(r, \frac{1}{n}\right)$ et donc $E(R_1) = \frac{r}{n}$, logique : on met r boules dans n urnes donc il y a en moyenne $\frac{r}{n}$ boules dans la première urne (donc dans chaque urne).
- $p(R_1 = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$ donc $E(X) = E(R_1 + \cdots + R_n) = E(R_1) + \cdots + E(R_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$.
- On voit que :
  - à r fixé, si $n \to \infty$, $E(X) \sim n - r$, c'est comme s'il y avait une boule par tiroir : il y a tellement de tiroirs qu'il y a peu de chances que deux boules soient ensemble ;
  - à n fixé, si $r \to \infty$, $E(X) \to 0$: si peu de tiroirs et beaucoup de boules, les chances qu'un tiroir soit vide s'amenuisent.

Remarque : cet exercice est le même, sous une présentation différente, que celui de l'ascenseur

3.6.2. L'ascenseur

Un ascenseur prend r personnes au rez-de-chaussée et commence à monter. Chaque personne j va à un étage E_j de loi uniforme dans $\{1, ..., n\}$, et les E_j sont mutuellement indépendants. L'ascenseur ne s'arrête qu'aux étages où quelqu'un sort. On note :

- R_1 la variable donnant le nombre de personnes sortant à l'étage 1 ;
- $Y_{i,j}$ la variable de Bernoulli qui vaut 1 si la personne j sort à l'étage i ;
- X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'ascenseur snobe l'étage i ;
- $\widetilde{X_i}$ la variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i ;
- $X_i = 1 - \widetilde{X_i}$;
- X le nombre d'étages snobés par l'ascenseur et $\tilde{X}$ le nombre d'étages

Donner $E(X)$, puis la loi de X.
On appellera $S_{p,k}$ le nombre de surjections de $\{1, ..., p\}$ sur $\{1, ..., k\}$.

Réponse

- $Y_{i,j}$ suit $B\left(\frac{1}{n}\right)$.
- $p(X_i = 1)$ est la probabilité que personne ne s'arrête à l'étage i donc :
$$p(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r.$$
- $E(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^n E(\widetilde{X_i}) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\right) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\right)$.
- On remarque que si $r \to \infty$, $E(\tilde{X}) \to n$ ce qui est logique : l'ascenseur bondé risque davantage de faire l'omnibus. Inversemenent, si $n \to \infty$ à r fixé, $E(\tilde{X}) = r + o\left(\frac{r}{n}\right)$ par un simple DL : logique, 10 pelés dans un gratte ciel, les chances que deux sortent au même étage d'amenuisent.
- Loi de $\tilde{X}$: Ce n'est pas une loi binomiale !!! En effet, les $\widetilde{X_i}$ ne sont pas indépendants ! Soit $k \in \{1, ..., r\}$ une valeur possible de X. Choisissons k étages parmi r, il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. Les k étages étant choisis, il y a $S_{r,k}$ répartitions possibles des personnes sur ces deux étages. Donc les cas favorables sont au nombre de $\binom{n}{k} \times S_{r,k}$. Le ,nombre de cas possibles est égal au nombre total d'applications de $\{1, ..., r\}$ dans $\{1, ..., n\}$ qui est égal à n^r. Ainsi :
$$p(\tilde{X} = k) = \frac{\binom{n}{k} \times S_{r,k}}{n^r}.$$

Remarque : dans le fichier `dénombrement` *on voit quelques aspects simples du nombre de surjections.*

3.6.3. Urnes de plus en plus grandes

n urnes U_i contenant chacune i boules numérotées de 1 à i. On choisit au hasard uniforme une urne U_i puis au hasard uniforme une boule dans cette urne. X est le numéro de la boule choisie, calculer $E(X)$.

Réponse

$p(X=k)=\frac{1}{n}\sum_{i\geqslant k}\frac{1}{i}$.

Remarque : voir dans le fichier `v_a_plusieurs_va` une présentation plus théorique : il s'agit simplement d'une loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$ où N suit aussi une loi uniforme.

3.7. Nombre de numéros distincts

Une urne avec N boules numérotées $1,\ldots,N$. On tire n fois avec remise.

$T_n=$ le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n tirages.

1. Calculer $p(T_1)$ et $p(T_n)$.

   Réponse :

   - $p(T_1)=\dfrac{1}{N^{n-1}}$;
   - si $n<N$, $p(T_n)=0$;
   - si $n\geqslant N$, $p(T_n)=\dfrac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n}$.

2. Calculer $p(T_2)$.

   Réponse : il faut sommer $p(T_n=2)=\binom{N}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\times\frac{1}{N^n}$.

   On trouve $p(T_n=2)=\dfrac{(2^{n-1}-1)(N-1)}{N^{n-1}}$.

   On vérifie pour $N=2$ on trouve $1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, cohérent avec $\dfrac{1}{2^n}$ la probabilité de tirer n fois le même numéro.

3.8. Marche aléatoire et urne d'Ehrenfest

à mettre en forme

1. Un pion en $n=0$ fait à chaque étape t un saut de $+1$ ou -1, soit N son abscisse à l'étape t, loi de N.
2. n boules noires ou blanches, j'en choisis une les yeux fermés, je la peinds dans l'autre couleur (on suppose que la peinture sèche vite...). Soit N la proportion de blanches à l'étape t, loi de N = urne d'Ehrenfest.
3. n boules réparties dans deux urnes, je choisis une urne (1 chance sur 2) et j'y prend une boule pour la mettre dans l'autre (sil y en a une), N le nombre de boules dans l'urne de gauche à l'étape t, loi de N

4. TRIBUS

1. Soit $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$.
   a. Déterminer la tribu engendrée par $\{\{0,1\},\{3,4\}\}$
   b. Déterminer la tribu engendrée par $\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
2. Soit A l'ensemble des parties $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$ telles que :

$$2n\in\mathcal{P}\Rightarrow 2n+1\in\mathcal{P}.$$

   Est-ce que A est une tribu de $\mathbb{N}$?

Réponse : non, car $\{3\} \in A$ mais son complémentaire non.

5. Utilisation de Markov & Tchebychev-BienAymé

1. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Pour $\lambda, \varepsilon > 0$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X - np > n\varepsilon) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(X - np - n\varepsilon)}).$$

Réponse : C'est juste une habillage : $X - np > n\varepsilon \Leftrightarrow \mathrm{e}^{X - np - n\varepsilon} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda(X - np - n\varepsilon)} > 1$. Ainsi donc, ce n'est rien d'autre que Markov pour $a = 1$.

2. $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. On pose $k \in \mathbb{N}$. Le réel $p \in]0,1[$ est fixe tout au long de l'énoncé. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X_n - np| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}.$$

Il suffit alors de prendre ε tel que :

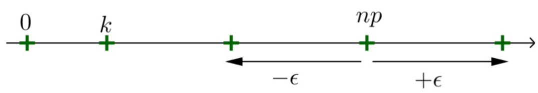

Figure 2. $X_n \leqslant k \Rightarrow |X_n - np| \geqslant \varepsilon$.

La valeur $\varepsilon = np - k$ convient. On a du coup :

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant k) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - np| \geqslant np - k) \leqslant \frac{np(1-p)}{(np-k)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$