Probabilités

Table des matières

.

1. Probas conditionnelles & Bayes

1.1. Buts

Exercice 1. Deux joueurs 1 et 2 font un « duel » consistant en ce que chacun tire une fois au but successivement et de manière indépendante. Une partie représente n duels joués successivement et indépendamment les uns des autres. La probabilité que 1 (respectivement) marque son but est toujours p (respectivement q).

Soient les événements respectifs suivants :

1. B_k : « exactement k buts ont été marqués en tout dans la partie » ;
2. A_m : « le joueur m a marqué exactement un but ».

Soit la variable N_m qui compte le nombre de buts marqués en tout par le joueur m.

On appelle

$$\begin{cases} p = p(A_1) \\ q = p(A_2) \end{cases}$$

1. On se place dans le cas $n=1$. Calculer $p(B_2), p(B_1)$, $p(B_0)$, puis $p(A_1|B_1)$.
2. Cas général. a) Calculer $p(B_k)$.

Autre habillage de l'exercice :

Exercice 2. Deux variables N_1, N_2 suivent respectivement les lois binomiales $B(n,p)$,$B(n,q)$ avec $p,q \in]0;1[$. Soit $B = N_1 + N_2$. On pourra noter B_k l'événement $B = k$.

1. On se place dans le cas $n=1$. Loi de B ?
2. Cas général.

Solution. a) Nous avons :

- $\boxed{p(B_2) = p\,q}$;
- $\boxed{p(B_1)} = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(1-q) + q(1-p) = \boxed{p + q - 2p\,q}$;
- $\boxed{p(B_0) = (1-p)(1-q)}$

. Enfin :

$$\begin{aligned} p(A_1|B_1) &= \frac{p(B \cap A_1)}{p(B)} \\ &= \frac{p(A_1) \times p(\overline{A_2})}{p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2)} \\ &= \frac{p(1-q)}{p+q-2p\,q}. \end{aligned}$$

Ceci donne, sachant qu'un seul but a été marqué, la probabilité que ce soit A_1 :

- si p est grand, celle-ci tend vers 1, logique ;
- si p est petit, celle-ci se rapproche de 0, logique ;
- si $p=q$, celle si fait $\frac{1}{2}$, logique aussi.

*

b) N_1 suit la loi binomiale $B(n,p)$ et N_2 la loi binomiale $B(n,q)$ donc :

$$\begin{aligned} p(B_k) &= \sum_{u+v=k} p(N_1=u)\,p(N_2=v) \\ &= \sum_{u+v=k} \binom{n}{u}\binom{n}{v} p^u(1-p)^{n-u}\,q^v(1-q)^{n-v} \end{aligned}$$

1.2. Tiroirs

Exercice 3. 1) Un objet a une chance p de se trouver dans ce meuble à 7 tiroirs. Sachant qu'on a fouillé sans succès les 6 premiers tiroirs, quelle est la probabilité qu'il soit dans le 7ème ? (les tiroirs sont équiprobables).

2) Idem avec n tiroirs et on a fouillé les $n-1$ premiers.

Solution. Soit S l'événement « l'objet est dans le 7ème tiroir » : $p(S)=\frac{p}{7}$.

Soit N l'événement « l'objet n'est pas dans les tiroirs 1-6 » : $p(N)=1-\frac{6p}{7}$, qu'on peut aussi atrapper par $p(N)=(1-p)+\frac{p}{7}$.

Alors on demande $p(S|N)=\frac{p(S\cap N)}{p(N)}$ mais $S\cap N$ c'est S d'où :

- Avec les formules usuelles :

$$\begin{aligned} p(S|N) &= \frac{p/7}{1-6p/7} \\ &= \frac{p}{7-6p} \end{aligned}$$

On vérifie pour $p=0$ et pour $p=1$ (cela donne $p(S|N)=1$, logique).

2. Avec des suites récurrentes

Exercice 4. On dispose de deux urnes :

- L'urne U_1 contient $\{BBNNN\}$.
- L'urne U_2 contient $\{BBBBNNN\}$

On effectue des tirages successifs avec remise :

- Initialement, on choisit une urne au hasard équiprobablement et on tire une boule dans l'urne choisie.
- De manière récurrente ensuite, si la boule tirée précédemment était B la suivante sera tirée dans U_1, sinon dans U_2.

On note B_n l'événement : « la boule tirée au n-ème tirage est blanche ».

On note $p_n=P(B_n)$.

1. Déterminer p_1 puis p_2.
2. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. En déduire p_n en fonction de n ainsi que $\lim_{n\to+\infty} p_n$.
4. On généralise en remplaçant les urnes U_1 et U_2 par deux urnes U_1' et U_2' contenant respectivement une proportion μ_1 et μ_2 de boules blanches.

Solution.

1. $p_1=17/35=13/15$ et $p_2=118/225$.
2. $p_{n+1}=-6/35\times p_n+4/7$
3. On trouve :
$$p_n=\frac{20}{41}-\frac{3}{1435}\times\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1},$$
de limite $\frac{20}{41}$ (presque égale à $\frac{1}{2}$) lorsque $n\to+\infty$.

4. On trouve $p_1=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ puis $p_{n+1}=p_n\times\mu_1+(1-p_n)\times\mu_2=(\mu_1-\mu_2)p_n+\mu_2$ d'où, simplement en recherchant le point fixe :
$$\boxed{\lim p_n=\frac{\mu_2}{1-\mu_1+\mu_2}}.$$
Interprétation :
   - *si* $\mu_2=0$, $\lim(p_n)=0$ *car alors dès que le tirage tombe dans l'urne 2, il y reste définitivement puisque dans l'urne 2 il n'y a que des noires ;*
   - *si* $\mu_1=1$, $\lim(p_n)=1$ *car alors dès que le tirage tombe dans l'urne 1, il y reste définitivement puisque dans l'urne 1 il n'y a que des blanches ;*
   - *si* $\mu_1=\mu_2=\mu=C^{\text{ste}}$, *alors* $p_n=C^{\text{ste}}=\mu$ *;*
   - *si* $\mu_1=0$ *ou* $\mu_2=1$, *un petit arbre explique la limite.*

Remarque : si on avait tiré sans remise, on n'aurait pas pu établir de récurrence ; par contre on aurait pu construire un algorithme.

3. Avec des dés

1. On jette indépendamment deux dés, un blanc, un noir (non truqués). On note :
   - $A=$ « le résultat du blanc est pair ».
   - $B=$ « le résultat du noir est pair ».
   - $C=$ « les deux ont la même parité ».

   Montrer que les événements A,B,C sont indépendants deux à deux mais pas trois à trois.
   Réponse : $p(A)=p(B)=1/2$ et $p(C)=1/4+1/4=1/2$ et $A\cap B=A\cap C=B\cap C$ d'où l'indépendance deux à deux. Ensuite, $A\cap B\cap C=A\cap B$ d'où la non-indépendance trois à trois.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $1/2$.
   a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et l'on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   b) Soit n un entier non nul. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et l'on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   c) Déterminer $\lim(p_n)$. Interpréter ce résultat.
   Réponses : $1/2$ puis $p_n=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$ de limite 1.

4. Avec des cartes

1. Dans un jeu de n cartes, il y a exactement 1 joker, on tire une main de n cartes, quelle est la probabilité d'avoir le joker dans la main ?
2. Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.
   a) Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
   b) Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?
3. Un jeu truqué de 32 cartes : l'une des 31 cartes est remplacée par un second as de cœur. On tire n cartes simultanément. On note $A_n=$ « le tirage permet de se rendre compte de la supercherie ».
   a. Calculer $p(A_n)$.
   b. Calculer le n minimal tel que $p(A_n)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

   Réponse : a) $p(A_n)=\dfrac{\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}}=\dfrac{n(n-1)}{32\times 31}$
   b) $p(A_n)\geqslant\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow n^2-n-496\geqslant 0$.

On résoud : $n=\dfrac{1+\sqrt{1985}}{2}$, arrondi au supérieur à $n=23$.

5. Petits exercices

1. **Bleus et Rouges**

   Sur Alphaïde une proportion p des individus est bleue le reste sont rouges. De plus une proportion q est riche le reste sont pauvres.

   De plus on sait que 70% des bleus sont riches et 80% des riches sont bleus.

   Exprimer q en fonction de p.

   Réponse : on trouve $q=p\times\dfrac{80}{70}$.

2. 30 billets de loterie dont n gagnants, j'en choisis deux, j'appelle $G=$ « je gagne » (j'ai au moins un ticket gagnant). Résoudre en n :
$$p(G)\geqslant 90\%.$$
   Réponse : $p(G)=1-\dfrac{\binom{30-n}{2}}{\binom{30}{2}}=$

   $58n-n^2-783\geqslant 0$ et $\Delta=58^2-4\times 783=232$ d'où $n\in[22;35]$ soit $n\geqslant 22$.

3. **Arbres**

   a. On donne $\boxed{p(A)=0,4}\,\boxed{p(B)=0,6}\,\boxed{p_{\bar{A}}(B)=0,4}$, déterminer $p_A(B)$, $p(A\cup B)$ et $p_{\bar{B}}(A)$.

      Réponses : $p_A(B)=0,9$; $p(A\cap B)=0,36$; $p(A\cup B)=0,64$; $p_{\bar{B}}(A)=0,1$.

   b. Soient A et B deux évènements avec $p(A)>0$. Comparer les probabilités conditionnelles $p(A\cap B|A\cup B)$ et $p(A\cap B|A)$

      Réponse : trivial car $p(A\cup B)\geqslant p(A)$...

4. On a $(2n)$ cartons numérotés de 1 à $2n$. On les mélange. Quelle est la probabilité qu'on obtienne à la fin les pairs d'abord et les impairs ensuite.

   Réponse : $p=\dfrac{(n!)^2\times(n!)^2}{(2n)!}=\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

6. Pile ou face

6.1. Autour de pair/impair

1. Deux joueurs lancent chacun n fois une pièce non truquée. Celui qui a tiré davantage de « pile » que l'autre a gagné. Calculer la probabilité p_0 du match nul.
$$\begin{aligned} p_0 &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{2n}{n}^2. \end{aligned}$$
   (Pour la dernière ligne on peut voir le fichier `dénombrement`).

7. Exercices variés avec des boules

7.1. Petits exercices

1. Une urne contient 4 boules blanches et 3 noires :

   - on en tire 3 successivement sans remise ; calculer $p(BBN)$.

Réponse : $p(BBN) = 6/35$.

- idem avec remise.
- idem simultanément (calculer alors $p(\{BBN\})$).

2. Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

   a. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ? Réponse 8/15.

   b. Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ? Réponse 3/8.

7.2. Avec n urnes

1. On se donne des urnes numérotées :

urne n°0	N boules noires
urne n°1	$(N-1)$ boules noires $+1$ boule blanche
...	
urne n°k	$(N-k)$ boules noires $+k$ boules blanches
...	
urne n°N	N boules blanches

On choisit une urne au hasard de manière équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire successivement des boules avec remise.

   a. Quelle est la probabilité π_n que les n-ième premières boules tirées soient blanches ?

   b. Que devient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Dans la k-ième urne, $p(n \text{ blanches successives}) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$. Donc en tenant compte du choix de l'urne :

$$p(n \text{ blanches successives}) = \pi_n = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Or, $\pi_n \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ par somme de Riemann.

2. On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leqslant n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Les répartitions possibles sont équiprobables.
   a) Déterminer la probabilité de l'événement :
   A : « chaque urne contient au plus une boule »
   b) Déterminer la probabilité de l'évènement :
   B : « il existe une urne contenant au moins deux boules ».