# Polynômes

## Table des matières



## 1. Expression de $P(X)$ connaissant ses racines

Expliciter un polynome $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

1. Les racines simples de $P(X)$ sont $\frac{1}{2} + \mathrm{i}, \frac{1}{2} - \mathrm{i}$ et 1 est racine double.
   Réponse : $P(X) = X^4 - 3X^3 + 4,25X^2 - 3,5X + 1,25$. *(vérifié dans maxima)*
2. Les racines de $P(X)$ sont exactement $\mathrm{i}, -\mathrm{i}, \frac{\mathrm{i}}{2} + 1, -\frac{\mathrm{i}}{2} + 1$.
   Réponse : $P(X) = X^4 - 2\,X^3 + 2.25\,X^2 - 2.0\,X + 1.25$. *(vérifié dans maxima)*
3. Les racines de $P(X)$ sont exactement $\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1 + \mathrm{i}\sqrt{5}, 1 - \mathrm{i}\sqrt{5}$.
   Réponse : $P(X) = X^6 - 2\,X^5 + X^4 + 10\,X^3 - 24\,X^2 - 12\,X + 36$. *(vérifié dans maxima)*
4. $P$ est de degré 4 et $P(-\sqrt{2}) = P(\sqrt{2}) = P(2) = P'(2) = 0$ et $P(1) = 3$.
   Réponse : $P(X) = -3(X^2 - 2)(X - 2)^2 = -3\,X^4 + 12\,X^3 - 6\,X^2 - 24\,X + 24$.
5. $P$ est de degré 6 et possède les trois racines suivantes :
   $$4 + 2\mathrm{i}, \quad \frac{5}{2} + \mathrm{i}\,\frac{4 + \sqrt{3}}{2}, \quad \frac{5}{2} + \mathrm{i}\,\frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$$
   *Il est conseillé d'utiliser l'une des deux relations suivantes :*
   $$(z - a)\,(z - \bar{a}) = z^2 + |a|^2 - 2\,z\,\Re(a)$$
   $$\text{ou : } (z - x - \mathrm{i}y)(z - x + \mathrm{i}y) = (z - x)^2 + y^2$$
   *On pourra exprimer les coefficients en décomposition en facteurs premiers pour éviter de grosses multiplications.*
   Réponse : *(vérifié dans maxima)*
   $$\begin{aligned}P(z) &= (z - 4 - 2\mathrm{i})(z - 4 + 2\mathrm{i}) \times \left(z - \frac{5}{2} + \mathrm{i}\,\frac{4 - \sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{5}{2} - \mathrm{i}\,\frac{4 - \sqrt{3}}{2}\right) \times \\ &\qquad \times \left(z - \frac{5}{2} + \mathrm{i}\,\frac{4 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{5}{2} - \mathrm{i}\,\frac{4 + \sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (z^2 + 20 - 8z) \times \left(z^2 + \left(11 + 2\sqrt{3}\right) - 5z\right) \times \left(z^2 + \left(11 - 2\sqrt{3}\right) - 5z\right) \\ &= (z^2 + 20 - 8z) \times (z^4 - 10z^3 + 47z^2 - 110z + 109) \\ &= \boxed{z^6 - 18z^5 + 147z^4 - 686z^3 + 1929z^2 - 3072z + 2180} \\ &= z^6 - 2 \times 3^2 z^5 + 3 \times 7^2\,z^4 - 2 \times 7^3\,z^3 + 3 \times 643\,z^2 - 3 \times 2^{10}\,z + 10 \times 218.\end{aligned}$$

Maxima :

```
(%i15) expand((X-1-%i*sqrt(3))*(X-1+%i*sqrt(3))*(X+1-
       %i*sqrt(3))*(X+1+%i*sqrt(3)))
```

(%o15) $X^4+4\,X^2+16$

```
(%i13) %i^2
```

(%o13) $-1$

```
(%i14)
```

## 2. Divers

1. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ en trouvant un polynôme $P$ de degré 4 tel que $P(X+1)-P(X)=X^3$ (voir fichier « séries »).
2. Sommes doubles :
   a. $P(X)=\sum_{k=0}^{n} X^k$, exprimer $(P(X))^2$.
   Réponse :

$$\begin{aligned}(P(X))^2 &= \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} X^{k+\ell}\\ &= \sum_{m=0}^{2n} X^m \sum_{\substack{k+\ell=m\\ 0\leqslant k,\ell\leqslant n}} 1\\ &= \boxed{\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)(X^m+X^{2n-m})+(n+1)X^n}.\\ &= \sum_{m=0}^{n-1}(m+1)X^m+\sum_{p=n+1}^{2n}(2n-p+1)X^p+(n+1)X^n\\ &= 1+2X+3X^2+\cdots n\,X^{n-1}+(n+1)\,X^n+n\,X^{n+1}+\cdots+X^{2n}\end{aligned}$$

   Exemple pour $n=5$ :

$$(P(X))^2=1+2X+3X^2+4X^3+5X^4+6X^5+5X^6+4X^7+3X^8+2X^9+X^{10}.$$

   On peut procéder à une vérification en prenant $X=1$.

   b. $P(X)=\sum_{p=1}^{n} p\,X^p$ et $Q(X)=\sum_{p=1}^{n} X^p$, exprimer $P(X)\times Q(X)$.
   Réponse :

$$\begin{aligned}P(X)\times Q(X) &= \sum_{m=0}^{2n} X^m \sum_{\substack{p+q=m\\ 0\leqslant p\leqslant n}} p\\ P(X)\times Q(X) &= \sum_{m=0}^{n} X^m(0+1+\ldots+m)+\sum_{m=n+1}^{2n} X^m(n+(n-1)+\ldots+(m-n))\\ P(X)\times Q(X) &= \boxed{\sum_{m=0}^{n}\frac{m(m+1)}{2}X^m+\sum_{m=n+1}^{2n}\frac{m}{2}(2n+1-m)\,X^m}.\end{aligned}$$

## 3. Racines symétriques

1. Trouver les $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que le polynôme $X^3-7X+\lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre.
   Si $a,b,c$ sont les racines avec $a=2b$ alors on a :
   - $a=1$ et $\lambda=6$ d'où $(a,b,c)=(1,2,-3)$ ;

- $a=-1$ et $\lambda=-6$ d'où $(a,b,c)=(-1,-2,3)$.

2. Factoriser $P(X)=X^4+12X-5$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant que $P$ possède deux racines de somme 2.
   Réponse : si $a,b,c,d$ sont les racines de $P$, avec $a+b=2$, alors on a :
   $$\begin{cases} c+d=-2 \\ a\,b+c\,d=4 \\ a\,b-c\,d=6 \\ a\,b\,c\,d=-5 \end{cases},$$
   d'où $a\,b=5$ et $c\,d=-1$ d'où $(a,b)=(1\pm 2\mathrm{i})$ et $(c,d)=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$ d'où :
   $$P(X)=(X^2-2X+5)(X^2+2X-1).$$

## 4. Division euclidienne

1. Division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)^2$ : exprimer le reste en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
   Réponse : $R(X)=P'(a)\,X+P(a)-a\,P'(a)$.
2. Soient $a$ un réel $P$ un polynôme tels que $P(a)=0$. Démontrer que $P(X)$ peut être factorisé par $(X-a)$.
   Méthode 1 : on divise $P(X)=(X-a)Q(X)+R(X)$ avec $\partial°R=1$ et on prend $X=a$.
   Méthode 2 : on écrit $P(X)-P(a)$ et on utilise l'identité :
   $$(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+a\,b^{n-2}+b^{n-1}).$$

## 5. Factorisation de polynômes

### 5.1. Par diverses méthodes

1. Factoriser $P(X)=X^4+1$.
   Factorisation canonique : $P(X)=(X^2+1)^2-2X^2=\left(X^2+1-X\sqrt{2}\right)\left(X^2+1+X\sqrt{2}\right)$
   Par les complexes :
   $$\begin{aligned} P(X) &= (X^2-\mathrm{i})(X^2+\mathrm{i}) \\ &= (X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})(X+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}) \\ &= (X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})(X+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}) \\ &= \left(X^2-X\sqrt{2}+1\right)\left(X^2+X\sqrt{2}+1\right). \end{aligned}$$
2. Factoriser $P(X)=X^4+X^2-6$.
   Factorisation canonique : $P(X)=\left(X^2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}=(X^2-2)(X^2+3)$.
   Bicarrés : $X^2+X-6=(X-2)(X+3)$ donc $X^4+X^2-6=(X^2-2)(X^3+3)$.
3. Factoriser $P_1(X)=X^4+X^2+1$ puis $P_2(X)=X^4-X^2+1$, et enfin $Q(X)=X^8+X^4+1$.
   On utilise une sorte de factorisation canonique en partant de $(X^2+1)^2$ :
   $P_1(X)=(X^2+1)^2-X^2=(X^2-X+1)(X^2+X+1)$ et
   $P_2(X)=(X^2+1)^2-3X^2=\left(X^2-X\sqrt{3}+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)$.
   Ainsi, $Q(X)=P_1(X^2)=P_1(X)P_2(X)$.
4. Factoriser : $f(X)=2X^2+X-1$ ; $g(X)=9X^2-6X+1$ ; $h(X)=X^2+X+1$.
5. Factoriser : $f(X)=X-X^3$ ; $g(X)=X^3+12X^2+8X-3$ ; $h(X)=1-X^3$.
6. Factoriser : $f(X)=1-X^6$ ; $g(X)=1-X^4$ ; $h(X)=X^2-X^{10}$.

### 5.2. Racines de l'unité dans $\mathbb{C}$

1. Factoriser $P(X)=X^5-1$.

Réponse :

$$\begin{aligned} P(X) &= \prod_{k=0}^{4}\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right)\\ &= (X-1)\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\right)\\ &= (X-1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\right). \end{aligned}$$

Directement :

$$\begin{aligned} X^5-1 &= (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)\\ &= \ldots \end{aligned}$$

## 5.3. Divers

1. Factoriser dans $\mathbb{Z}[X]$ le polynome : $P(X)=X^6+X^4-3X^3-X+2$.

**Solution.** Déjà 1 est racine double et l'on trouve :

$$P(X)=(X-1)^2(X^4+2X^3+4X^2+3X+2).$$

Ensuite on peut chercher $X^4+2X^3+4X^2+3X+2=(X^2+a\,X+b)(X^2+c\,X+d)$ par identification et chercher des valeurs entières pour $a,b,c,d$. On trouve :

$$\boxed{P(X)=(X-1)^2(X^2+X+1)(X^2+X+2)}.$$

2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ : $P(X)=X^{2n}-2\cos(n\,a)\,X^n+1$.

**Solution.** On pose $Y=X^n$. On résoud donc $Y^2-2\cos(n\,a)Y+1=0$ on trouve $S_Y=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}na};\mathrm{e}^{-\mathrm{i}na}\}$.
Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} X^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}na} &\quad\text{donne}\quad X_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}},\\ X^n=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}na} &\quad\text{donne}\quad \overline{X_k}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}. \end{aligned}$$

On associe les racines conjuguées : $(X-X_k)(X-\overline{X_k})=X^2+1-2\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)$, d'où :

$$\boxed{P(X)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2+1-2\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)}.$$

3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ : $P(X)=3X^4+11X^3+20X^2+7X-5$, sachant que $P$ a toutes ses racines dans $\mathbb{Q}$.

**Solution.** On a tout de suite $P(X)=(X+1)(3X+a)(X^2+b\,X+c)$ puis :

$$\begin{cases} a+3b=8\\ a+a\,b+3(b+c)=20\\ a(b+c)+3c=7\\ a\,c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-3b\\ 8b-3b^2+3c=12\\ a\,c=-5, \end{cases}$$

on en déduit par substitution $c=-\dfrac{5}{a}=-\dfrac{5}{8-3b}$ d'où $8b-3b^2-\dfrac{15}{8-3b}=12\Leftrightarrow 9b^3-48b^2+100b-111$.
$b=3$ est racine évidente, on en déduit les deux autres : $b=\dfrac{7\pm3\mathrm{i}\sqrt{11}}{6}$ mais $b$ doit être réel.
On a donc :

$$(a=-1;b=3;c=5).$$

On vérifie que le discriminant de $X^2+3X+5$ est négatif.

# 6. Équations dont l'inconnue est $P$

## 6.1. Petites équations en $P$

1. Trouver les $P(X)$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)\,P(X)$.
   Réponse : degré 2 et $P(X)=\lambda\,(X^2-1)$.
2. Trouver les $P(X)$ tels que $(P'(X))^2=4P(X)$.

Réponse : degré 2 et $P(X) = X^2 + b\,X + \frac{b^2}{4}$.

3. Trouver les $P(X)$ vérifiant $P(2X) = P'(X)\,P''(X)$.

**Solution.** En regardant le terme de plus haut degré on obtient :

$$\begin{aligned} & a_n \times 2^n X^n = (n\,a_n\,X^{n-1})\,(n(n-1)a_n\,X^{n-2}) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} n = 2n-3 \\ 2^n\,a_n = n^2(n-1)(a_n)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

La première ligne donne $n=3$ et la seconde donne $8\,a_3 = 18(a_3)^2$ donc $a_3 = \frac{4}{9}$.

On cherche les autres coefficients, on les trouve nuls, d'où : $\boxed{P(X) = \frac{4}{9}X^3}$.

4. Trouver les $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = X^5 - 209X + a$ admette (entre autres) deux racines dont le produit fait 1.

**Solution.** Il faut que $X^2 + \alpha\,X + 1$ divise $P(X)$. On procède à la division euclidienne :

$$\begin{cases} \alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 & \Rightarrow \ \alpha = \pm 4 \\ a = -\alpha^3 + 2\alpha & = \ a = \pm 56. \end{cases}$$

Ainsi, on a les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} a = 56 \ &\Rightarrow\ \alpha = -4 \text{ donc les racines de produit 1 sont } 2 \pm \sqrt{3}; \\ a = -56 \ &\Rightarrow\ \alpha = 4 \text{ donc dans ce cas on trouve } -2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

## 6.2. Une équation astucieuse

$\boxed{\text{Résoudre } P(X^2) = P(X)P(X+2)}$.

**Solution.** Les considérations sur le terme de plus haut degré donnent : $a_n X^{2n} = (a_n)^2 X^{2n}$ d'où $a_n = 1$ : le polynome est unitaire.

Intéressons-nous maintenant aux racines de $P$ :

Si $z$ est racine, $z^2$ l'est aussi et donc tous les élements de l'ensemble $\{z, z^2, z^4, \ldots, z^{2^n}, \ldots\}$ sont des racines de $P$ donc cet ensemble doit être fini, donc $z = \mathrm{e}^{q i \pi}$ avec $q \in \mathbb{Q}$ ou $z = 0$.

- Supposons que $P$ possède une racine de la forme $e^{i\alpha}$, avec un certain $\alpha \in [0; 2\pi[$.
  Alors, en prenant $X = e^{i\alpha/2}$, on a que soit $e^{i\alpha/2} + 2$ soit soit $e^{i\alpha/2}$ est racine de $P$ aussi.
  - Si $e^{i\alpha/2} + 2$ est racine cela ne va pas car $|e^{i\alpha/2} + 2| \neq 1$ sauf si $\alpha = 2\pi$ mais on a choisi $\alpha$ dans $[0; 2\pi[$ (ouvert en $2\pi$) ;
  - Donc $e^{i\alpha}$ racine $\Rightarrow$ $e^{i\alpha/2}$ racine aussi. Cela induit un ensemble infini de racines : $\{e^{i\alpha}, e^{i\alpha/2}, \ldots, e^{i\alpha/2^n}, \ldots\}$, sauf dans le cas $\alpha = 0$.
  - Si $P$ possède une racine de module 1, ça ne peut donc être que $z = 1$.
- Supposons que $P$ possède 0 comme racine. Alors en prenant $X = -2$ on voit que 4 est racine, nous avons vu que cela était impossible.

$P(X)$ s'écrit donc $\boxed{P(X) = (X-1)^n}$.

L'équation s'écrit alors : $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ ce qui est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que le cas $n = 0$ fonctionne aussi.

# 7. Utilisation de $X = \mathrm{i}$ ou $X = j$

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on :

$$X^2 + X + 1 | (X+1)^n - X^n - 1 \tag{1}$$

**Solution.** $(1) \Rightarrow (j+1)^n = j^n + 1$, or $j + 1 = -j^2 = -\bar{j}$ et donc :
$(1)$ entraîne, au choix : $(-1)^n\,j^{2n} = j^n + 1$ ou $(-1)^n\,\overline{j^n} = j^n + 1$.
La seconde écriture est plus pratique, et l'on a :

- pour $n = 2p+1$ :

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{2ni\pi/3} + \mathrm{e}^{-2ni\pi/3} = -1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos\!\left(2n\,\frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & n \text{ non multiple de } 3\,; \end{aligned}$$

- pour $n=2p$ :

$$\underbrace{\mathrm{e}^{2ni\pi/3}-\mathrm{e}^{-2ni\pi/3}}_{\text{imaginaire pur !}}=-1 \text{ impossible ;}$$

et donc la réponse est : $n$ impaire non multiple de 3 soit : $\boxed{n\equiv\pm1[6]}$.

2. Exercice similaire : Reste de la division euclidienne de $(X+1)^n-X^n-1$ par $X^2+X+1$.

**Solution.** Le reste s'écrit $R(X)=a\,X+b$ et l'on a $(j+1)^n-j^n-1=a\,j+b$ d'où :

- si $n=3k$, alors $a=0$ et $b=(-1)^n-2$ ;
- si $n=3k+1$, alors $a=b=(-1)^{n-1}-1$ ;
- si $n=3k-1$, alors $b=0$ et $a=(-1)^n+1$.

On vérifie que pour $n\equiv\pm1[6]$, on a $R(X)=0$.

3. Reste dans la division euclidienne de $(X\cos t+\sin t)^n$ par $(X^2+1)$.

**Solution.** On écrit $(X\cos t+\sin t)^n=(X^2+1)\,Q(X)+a\,X+b$, puis on prend $X=\mathrm{i}$ :

$$\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}=a\,\mathrm{i}+b, \tag{2}$$

d'où :

- si $n=2k$ alors $(2)\Rightarrow\begin{cases} a=-(-1)^k\sin(n\,t)\\ b=-(-1)^k\cos(n\,t)\end{cases}$ ;
- si $n=2k+1$ alors $(2)\Rightarrow\begin{cases} a=(-1)^k\cos(n\,t)\\ b=(-1)^k\sin(n\,t)\end{cases}$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} a &=& \sin\left(-n\,t+n\frac{\pi}{2}\right)\\ b &=& \cos\left(-n\,t+n\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}}.$$

## 8. Racines symétriques

1. On note $a,b,\bar{b}\in\mathbb{C}$ les racines de $P(X)=X^3-X+1$.
   a. Vérifier qu'effectivement, $P$ possède une seule racine réelle.
   b. On pose $c=\bar{b}$. Calculer $a^7+b^7+c^7$.

**Solution.** a) Variation : posons $f(t)=t^3-t+1$, alors $f'(t)=3t^2-1$ de racines $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et il reste à calculer :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \left(1+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\times\left(1-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &= 1-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\\ &= 1-\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right)\\ &= 1-\frac{4}{27}>0,\end{aligned}$$

donc deux racines complexes, une réelle.

b) Calcul : en écrivant $a^7=a^3\times a^3\times a$, on aboutit à $a^7=2a-1-2a^2$.

Si donc l'on pose $\begin{cases}\sigma_1=a+b+c=0\\ \sigma_2=a\,b+b\,c+c\,a\end{cases}$ alors on a :

$$a^7+b^7+c^7=2\cancel{\sigma_1}-3-2(a^2+b^2+c^2).$$

On remarque que $(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(a\,b+b\,c+c\,a)$ et l'on en déduit que $a^2+b^2+c^2=-2\sigma_2=2$ d'où :

$$\boxed{a^7+b^7+c^7=-7}.$$

2. On pose $P(X)=X^3-\left(2+\sqrt{2}\right)X^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{2}$, on note $a,b,c$ les trois racines de $P$ et $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ses trois fonctions symétriques.
   Soit $Q(X)$ le polynome unitaire de racines $a^2,b^2,c^2$.
   a. Trouver les trois fonctions symétriques $\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3'$ de $Q(X)$.
   b. Trouver l'expression de $Q(X)$.

c. Trouver $a, b, c$.

**Solution.** On a :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a + b + c = 2 + \sqrt{2} \\ \sigma_2 = a\,b + a\,c + b\,c = 2\big(1 + \sqrt{2}\big) \\ \sigma_3 = a\,b\,c = 2\sqrt{2}, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \sigma_1' = a^2 + b^2 + c^2 = (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2 = 2 \\ \sigma_2' = a^2\,b^2 + a^2\,c^2 + b^2\,c^2 = (\sigma_2)^2 - 2\sigma_3\,\sigma_1 = 4 \\ \sigma_3' = (a\,b\,c)^2 = (\sigma_3)^2 = 8. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{Q(X) = X^3 - 2X^2 + 4X - 8}$. Les racines évidentes sont rapides à trouver : $2, \pm 2\mathrm{i}$.

Du coup, $\{a, b, c\} \subset \big\{\pm\sqrt{2}, \pm(1 + \mathrm{i}), \pm(1 - \mathrm{i})\big\}$ et par $\sigma_1$ on trouve que seules les positives vont donc :

$$\boxed{\{a, b, c\} = \big\{\sqrt{2}; 1 \pm \mathrm{i}\big\}}.$$