Exercices pour débutants

Table des matières

1. Ensembles

Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que $A = B \Leftrightarrow C\Delta B = C\Delta A$.

2. Quantificateurs

2.1. Divers

1. Donner un exemple d'un couple de fonctions (f, g) vérifiant :
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times g(x) < 0$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) \times f(x) < 0$
2. Donner un exemple de fonctions f, g vérifiant la propriété suivante :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) = g(y) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) \neq g(y)$$
3. **(14)** On considère une suite (u_n) vérifiant :
   $$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, |u_o| < \varepsilon.$$
   Est-ce que cela veut dire que $\lim (u_n) = 0$?
4. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer avec les quantificateurs les situations suivantes :
   - $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
   - $\lim\limits_{-\infty} f = 1$.
5. Soit (u_n) une suite réelle. Exprimer avec les quantificateurs les situations suivantes :
   - (u_n) est monotone.
   - (u_n) est bornée.
6. **(1)** Soient $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
   - La phrase A: «$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ » est-elle équivalente à la phrase B: «$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ » ?

- Donner un exemple de $f, g \neq 0$ (i.e. ni f ni g n'est la fonction nulle) telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times g(x) = 0$.

7. Pour chacune des propositions suivantes, donner un exemple de fonctions f, g vérifiant la propriété énoncée :
   - **(3)** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) = g(y)$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) \neq g(y)$
   - **(5)** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times g(x) < 0$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) \times f(x) < 0$
8. Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Trouver l'intrus parmi les trois phrases suivantes :
   - $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \times g(x) = 0$
   - $\exists x, y \in \mathbb{R} / f(x) \times g(y) = 0$
   - $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$ **et** $\exists x \in \mathbb{R} / g(x) = 0$
9. Inventer une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in]-\varepsilon, \varepsilon[, f(y) = 1.$$
10. Représenter graphiquement un exemple de fonction f telle que (les questions sont indépendantes) :
    a. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \geqslant x / f(y) = 2$
    b. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \geqslant x / f(y) = 2$
11. x un réel fixé tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / |x - n| < \varepsilon$. Que dire de x ?
12. x un réel fixé tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z} / x - n = p$. Que dire de x ?

2.2. Ensembles

Pour chaque propriété suivante, trouver un exemple de partie $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant cette propriété, et un contrexemple de partie $A' \subset \mathbb{R}$ ne la vérifiant pas :

1. $\forall a \in A, \exists M \notin A / a \leqslant M$.
   Réponses : $\boxed{\begin{array}{c} A = [0,1] \text{ ou }]-\infty, 1] \\ \hline A' = [1, +\infty[\end{array}}$.
2. $\forall a \in A, \exists M \in A / a < M$.
   Réponses : $\boxed{\begin{array}{c} A = [0; +\infty[\text{ ou } [0; 1[\\ \hline A' = [0, 1] \end{array}}$.
3. $\forall a \in A, \exists y \in A / |a - y| = 1$.
   Réponses : $\boxed{\begin{array}{c} \text{N'importe quel } A \supset [0; 2] \\ \hline \text{N'importe quel } A' \subset]0; 2[\end{array}}$.
   On peut proposer des exemples de demander de voir si ça convient :
   $X = [-1; 0]$ *ou* $X = \mathbb{R}^+$ *ou* $X = \mathbb{Z}$ *ou* $X = \{0\}$.
4. $\forall a \in A, \exists y \notin A / |a - y| < 1$.
   Réponses : $\boxed{\begin{array}{c} A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \\ \hline A' = \mathbb{R} \text{ ou } A' = \mathbb{Q} \end{array}}$.
5. $\forall a \in A, [a - 1/2; a[\cup]a; a + 1/2] \cap A = \emptyset$.
   Réponses : $\boxed{\begin{array}{c} A = \mathbb{Z} \\ \hline A' = \mathbb{R} \end{array}}$.

3. FONCTIONS RÉELLES

3.1. Exercices bêtes

1. La fonction $f(x) = \ln\left(\tan^2 x + 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ admet-elle une limite en 0 ?

Réponse : non car elle n'est... jamais définie.

3.2. Études de fonctions

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right).$$

   a. Nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ (discuter suivant k).

4. Min et Max

1. On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$ et leur courbe C_f et C_g. Soit O l'origine du repère. Une demi droite D d'origine O coupe C_f et C_g en A et B. Est-ce que OB est le double de OA ?

5. Géométrie

1. On pose $f(x) = x^2$. Pour tout réel a, on note A_a (respectivement B_a) le point de la parabole d'abscisse a (respectivement $-\dfrac{1}{a}$) et T_a (respectivement T'_a) la tangente à C_f en A_a (respectivement B_a).

   a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre T_a et T'_a.
   Réponse : $M_a\left(\dfrac{a^2-1}{2a}; -1\right)$.

   b. Soit $M(b, -1)$, déterminer le réel a tel que T_a et T'_a se coupent en M.
   Réponse : $\begin{cases} a &= b - \sqrt{b^2+1} \\ -\frac{1}{a} &= b + \sqrt{b^2+1}; \end{cases}$

   c. Montrer que les droites $\{(A_a B_a), a \in \mathbb{R}\}$ sont concourrantes.
   Réponse : en $(0; 1)$.

6. Équations/Inéquations dans $\mathbb{R}$

6.1. Résolution par (analyse) étude d'une fonction

1. Résoudre :

$$\boxed{\sqrt{-x \ln x} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Réponse : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \dfrac{1}{2}$ d'où $S = D_f =]0; 1]$.

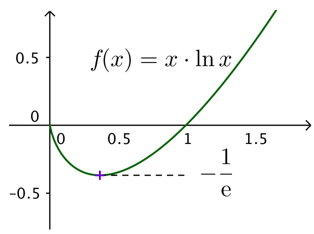

Figure 1. Courbe de $x \to x \ln x$.

2. Montrer que la fonction $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ n'admet aucune racine réelle, mais que la fonction $g(x) = x^5 - 3x^2 + 2$ en admet exactement une.

   Pour g, il y a un minimum local $x_0 = \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$ et $g(x_0) = -\frac{9}{5}(x_0)^2 + 2$ et $g(x_0) > 0 \Leftrightarrow 25000 > 162^2$ si mes calculs sont bons.

3. Utilisation de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

   a. Trouver $m = \mathrm{Max}\{\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}\}$

      Réponse : $x \mapsto x^{1/x}$ a son max en $x = \mathrm{e}$, reste à comparer $2^{1/2}$ et $3^{1/3}$ en élevant à la puissance 6 d'où $m = 9$ (pour $n = 3$).

   b. Trouver les $a < b \in \mathbb{N}$ tels que $a^b = b^a$

      Réponse : cela revient à résoudre $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ et l'on trouve $a \in]1, \mathrm{e}[$ d'où $a = 2$ d'où $2^4 = 4^2$ l'unique solution.

4. Soit l'équation $a\,x^3 + b\,x + c = 0$, déterminer une grandeur (un discriminant) qui permettra de savoir le nombre de solutions de cette équation.

   En étudiant les variations de $f: x \mapsto a\,x^3 + b\,x + c$ on aboutit à :

   - a et c de même signe $\rightarrow$ 1 unique simple solution ;
   - a ou c (pas les deux...) nul $\rightarrow$ 1 solution simple et une double ;
   - $a\,c < 0 \rightarrow$ on calcule $\square =$

5.

6.2. Résolutions par algèbre mais l'analyse aide à voir

1. Résoudre :

$$\boxed{\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}}\,(E).$$

Réponse : $S = \left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

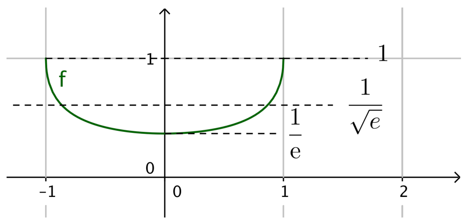

Figure 2. Courbe de $x \rightarrow \mathrm{e}^{-\sqrt{1-x^2}}$.

Sinon directement :

$E \Leftrightarrow -\sqrt{1-x^2} \geqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leqslant x^2 \leqslant 1$

6.3. Résolution en distinguant des cas

1. *Exo génial pour apprendre à distinguer des cas sur une situation simple* :

   Résoudre :

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant a + b}.$$

Réponse : on peut écrire $\frac{a+b}{a\,b} \leqslant a + b$ et discuter suivant le signe de $a + b$, ou bien opérer directement une règle des signes par $\frac{a+b}{a\,b}(1 - a\,b) \leqslant 0$.

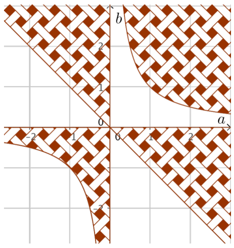

Figure 3. Solutions de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant a+b$.