1. Applications

1.1. Généralités

1. Soit E un ensemble fini et a un élément fixé de E. Soit φ: $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ qui à $A \subset E$ associe $A\backslash\{e\}$ ou $A\cup\{e\}$ selon si e est ou non dans A.
   φ est-elle surjective ? injective ?
2. Questions-piège : Si l'application f est injective, sa fonction réciproque est-elle injective aussi ? Et si f est surjective ?
3. Soit $f: A \rightarrow B$ injective et $g: B \rightarrow C$ surjective, avec A, B, C des sous-ensembles simples de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ lui-même ou $\mathbb{R}^+$ par exemple). Peut-on affirmer que $g \circ f$ est injective ? surjective ?
4. Même question avec f surjective et g injective.
5. Si $f: A \rightarrow A$ injective, montrer que $f \circ f$ injective aussi.
6. Même question en remplaçant « injective » par « surjective »
7. Soit I l'ensemble des entiers naturels impairs. Décrire de la manière que l'on veut (expression formelle ou schéma) :
   a. une application $a: I \rightarrow \mathbb{N}$ qui est injective non surjective. Réponse : l'identité
   b. une application $b: I \rightarrow \mathbb{N}$ qui est bijective. Réponse : $f(n) = (n-1)/2$.
   c. une application $c: I \rightarrow \mathbb{N}$ qui est surjective non injective. Réponse : $f(n) =$

1.2. Avec des fonctions réelles

1. On pose f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x$, discuter suivant a et b de l'injectivité et de la surjectivité de f.
2. Est-il possible d'avoir (si non, pourquoi, si oui en trouver une) une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (les questions sont indépendantes) :
   a. f injective mais f^2 non ;
   b. f injective mais e^f non.
3. On pose $f(x) = \dfrac{2-x}{1+x}$, démontrer que f est bijective (de quel ensemble vers quel ensemble ?) et déterminer la bijection réciproque.
4. On pose : $f: \left\{\begin{array}{ccc} D_f & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \frac{|x|}{1+|x|} \end{array}\right.$, cette fonction est-elle injective ? surjective ? Si non, trouver A, $B \subset \mathbb{R}$ telle que f soit bijective et déterminer la bijection réciproque.
5. On pose $f: \left\{\begin{array}{ccc} D_f & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 - x + a} \end{array}\right.$ où $a \in \mathbb{R}$. Discuter suivant a de l'injectivité et de la surjectivité de f.
6. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, montrer que f est injective.
7. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x \,/\, f(x) = f(y)$. f peut-être être surjective ?
8.
9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante est-elle forcément injective ? surjective ?
10. Donner des exemples de fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que (questions indépendantes) :
    - f injective
    - f injective non bijective
    - f surjective
    - f surjective non bijective.
11. Pour chaque fonction suivante :
    $a: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow e^x \end{array}\right.$, $b: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \ln(x) \end{array}\right.$, $c: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^3 - x \end{array}\right.$, $d: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{array}\right.$, $e: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x \end{array}\right.$,
    dire si elle est :
    a. f bijective

b. f injective mais non bijective ;
c. f surjective mais non bijective ;
d. f bijective mais f^2 non bijective.

12. Injectivité :
    a. Peut-on trouver un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec $D_f = \mathbb{R}$) telle que f injective et f non monotone.
    b. Peut-on trouver un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec $D_f = \mathbb{R}$) telle que f non injective et f monotone.